1. Distribución de probabilidad binomial.

1.1. Experimento Bernoulli.

<u>Definición</u>: Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución de probabilidad Bernoulli, si consiste de un experimento en que se tienen dos resultados posibles, éxito o fracaso; el primero con probabilidad p y el segundo con probabilidad q, y con $p+q=1$. A partir de este vamos a modelar otros tipos de experimentos.

1.2. Experimento binomial.

<u>Definición</u>: Un experimento binomial posee las siguientes propiedades:

1. El experimento consta de un número determinado, n, de ensayos idénticos.
2. Cada ensayo tiene dos resultados posibles.
3. La probabilidad de tener éxito en un ensayo es igual a p, y permanece constante de un ensayo a otro. La probabilidad de un fracaso es igual a $q = 1-p$.
4. Los ensayos son independientes.
5. La variable aleatoria bajo estudio es Y, el número observado de éxitos en n ensayos.

Es importante destacar que claramente el experimento binomial no es mas que la repetición n veces del mismo experimento Bernoulli. Es decir, que si $X_i \sim Bern(p)$ y donde

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si es} \quad \text{éxito} \\ 0 & \text{si es} \quad \text{fracaso} \end{cases}$$

Entonces $Y \sim Bin(n,p)$ es lo mismo que $Y = \sum_{i=0}^{n} X_i$.

<u>Definición</u>: Se dice que una variable aleatoria Y tiene distribución binomial basada en n ensayos con probabilidad de éxito p si y solo si

$$p(y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y}.$$

con $y = 0, 1, ..., n$ y $0 \leq p \leq 1$.

<u>Ejemplo</u>. Un examen de opción multiple tiene 15 preguntas, cada una con cinco respuestas posibles, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los alumnos que lo presenta contesta cada una de las preguntas de forma aleatoria e independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 10 de sus respuestas sean correctas?

<u>Solución</u>.
Es claro que la variable aleatoria de intéres Y es la cantidad de preguntas correctas del alumno. La probabilidad de acertar una respuesta es 0.2, por lo tanto $q = 0{,}8$.
Entonces queremos $P(Y \geq 10)$

$$P(Y \geq 10) = \sum_{i=10}^{15} p(i) = p(10) + p(11) + p(12) + p(13) + p(14) + p(15)$$

$$= \binom{15}{10}(0{,}2)^{10}(0{,}8)^5 + ... + \binom{15}{15}(0{,}2)^{15}(0{,}8)^0$$

TEOREMA: Si Y es una variable aleatoria binomial basada en n ensayos, con probabilidad de éxito p y probabilidad de fracaso q, entonces

$$\mu = E[Y] = np \text{ y } \sigma^2 = V(Y) = npq.$$

EJEMPLO. Una empresa de exploraciones petróleras tiene suficiente capital para financiar diez perforaciones. La probabilidad de éxito de cada una de ellas es 0,10. Suponga que las perforaciones son independientes. Encuentre la media y la varianza del número de exploraciones exitosas.

SOLUCIÓN.
Para este ejercicio tenemos que $n = 10$, $p = 0{,}1$ y $q = 0{,}9$. Por lo tanto

$$\mu = np = 10 \,\mathrm{x}\, 0{,}1 = 1.$$

y

$$\sigma^2 = npq = 10 \,\mathrm{x}\, 0{,}1 \,\mathrm{x}\, 0{,}9 = 0{,}9.$$